SESSION DE 1975

CONCOURS B

ANALYSE

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 2

Les candidats sont invités à écrire lisiblement et à respecter les notations de l'énoncé. Ils justifieront d'autre part rigoureusement les raisonnements qu'ils seront amenés à faire.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel sur **R** des fonctions réelles définies et continues sur $[0, +\infty[$.

PRÉLIMINAIRE

On se propose dans cette introduction de déterminer le sous-ensemble E_0 de $\mathcal{C}$, constitué des fonctions f réelles définies et continues sur $[0, +\infty[$ et vérifiant :

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad f(x^2) = f(x)$$

1° Montrer que E_0 est un espace vectoriel sur **R**.

2° α. a étant un nombre réel strictement positif, étudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $U_n = a^{\frac{1}{2^n}}$

β. f étant un élément de E_0, montrer que f est constante sur $[0, +\infty[$.

3° Quelle est la dimension de E_0?

PREMIÈRE PARTIE

f étant un élément de $\mathcal{C}$ on désigne par $L(f)$ la fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$L(f)(0) = -f(0)$$

$$L(f)(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_x^{x^2} f(t)\,dt \qquad \text{si } x > 0$$

1° Montrer que quel que soit l'élément f de $\mathcal{C}$ alors $L(f) \in \mathcal{C}$.

2° Montrer que l'application $L : f \longmapsto L(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

Déterminer son noyau Ker L. (On utilisera les résultats du préliminaire.)

L est-il injectif? L est-il surjectif?

3° n étant un entier naturel, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ formé des restrictions des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n à $[0, +\infty[$. Montrer que si $f \in E_n$ alors $L(f) \in E_{2n+1}$.

On considère l'application linéaire l de E_3 dans E_7 qui à toute fonction f de E_3 associe la fonction $l(f) = L(f)$ de E_7. Donner la matrice de l relativement aux bases

$$\{1, x, x^2, x^3\} \text{ et } \{1, x, x^2, \ldots, x^7\} \text{ de } E_3 \text{ et } E_7.$$

4° Montrer que quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ alors $L(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donner l'expression de sa dérivée.

Montrer qu'une condition suffisante pour que $L(f)$ soit dérivable en 0 est que $f'(0) = 0$ (c'est-à-dire f dérivable en 0 et sa dérivée nulle en ce point); alors $(L(f))'(0) = f(0)$.

Cette condition est-elle nécessaire?

DEUXIÈME PARTIE

g désignant la fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[\qquad g(t) = e^{-t^2}$$

On se propose d'étudier dans cette partie la fonction $G = L(g)$, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$G(0) = -g(0)$$

$$\text{et } \forall x > 0 \qquad G(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

(On ne cherchera pas à calculer $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.)

1° Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$. Donner sa dérivée G'.

2° α. Montrer que $\forall\, x \in [0, 1]$, $G'(x) > 0$.

β. Montrer que $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ $G'(x) < 0$. (Pour cela on aura avantage à étudier les variations de la fonction $x \longmapsto 2xe^{x^2-x^4} - 1$ sur $[1, +\infty[$; à montrer qu'elle s'annule en un point α_0, $1 < \alpha_0 < \frac{3}{2}$, et à en déduire son signe sur $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.)

γ. En déduire que G' s'annule au moins une fois entre 1 et $\frac{3}{2}$.

Puis en se servant des résultats de l'étude faite au β précédent montrer que cette racine de l'équation $G'(x) = 0$ est unique.

3° Déterminer $\lim_{x \to +\infty} G(x)$

Montrer que :

$$\forall\, x \in [0, 1] \qquad G(x) \geqslant x - 1$$

et

$$\forall\, x \in [0, +\infty[\qquad G(x) \leqslant \frac{1}{e}(x - 1)$$

En déduire : $\sup_{x \in [0, +\infty[} G(x) \leqslant \frac{1}{2e}$.

4° Tracer le graphe de G.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail